Тартылыс өрісіндегі қозғалыс. Бүкіл әлемдік тартылыс заңы

1 Гравитациялық өрістегі материялық нүктенің қозғалысы. Кеплер заңдары
2 Космостық жылдамдықтар

Гравитациялық өрістегі материялық нүктенің қозғалысы. Кеплер заңдары.

1. Центрлік өрістегі материялық нүктенің қозғалысы туралы мәселе
2. Әлемнің гелиоцентрлік жүйесі. Кеплердің бірінші заңы
3. Кеплердің екінші заңы
4. Кеплердің үшінші заңы.

Материялық нүктенің центрлік өрістегі қозғалысы туралы мәселе үлкен қызығушылық тудырады, оның бір мысалы планеталардың Күнді айнала қозғалуы. Планеталар центрлік болып табылатын гравитациялық күш әсерінен қозғалады (өріс центрлік күштің өрісі, немесе центрлік өріс деп аталады, егер де ол жағынан материялық нүктеге әсер ететін күш центрлік болып табылса, былайша айтқанда материялық нүктенің және қандайда бір қозғалмайтын нүктенің (күш центрі) арасындағы арақашықтан ғана тәуелді және кез келген нүктеде не күш ценрінен, не күш центріне қарай бағытталған).

Денедердін жерге құлап түсуі, тұйықталған орбита ойымен Айдың жерді айналуы, планетапардың Күнді айнала козғалуы сияқты құбылыстар бүкіл әлемдік тартылыс күштерінің ықпалынан болады. Табиғаттағы барлық денелер бір-біріне тартылады.

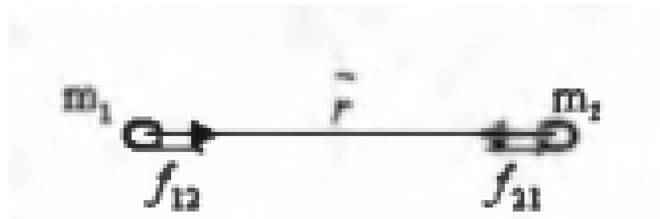
Осы тартылысқа бағынатын заңды Ньютон анықтап, бүкіл әлемдік тартылыс заңы деп атаған. Осы заң бойынша екі дененің бір-біріне тартылатын күші осы денелердің массаларына тура пропорционал, ал олардың ара кашықтығының квадратына кері пропорционал болады:

$$f = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (1)$$

мұндағы γ - белгілі тұрақты шама, бұл тартылыс тұрақтысы немесе гравитациялык түрақты деп аталады; оның сан мәні күштің, массаның және ара қашықтықтың қандай бірліктермен өлшенгеніне байланысты болады.

Ньютонның заңы жоғарыда айтылған түрінде, тек денелердің өлшемдері олардың r ара кашықтығымен салыстырғанда кішкене болса ғана дұрыс болады. Тартылыс күші бір-біріне әсер ететін денелер арқылы өтетін түзудің бойымен бағытталған (1-сурет).

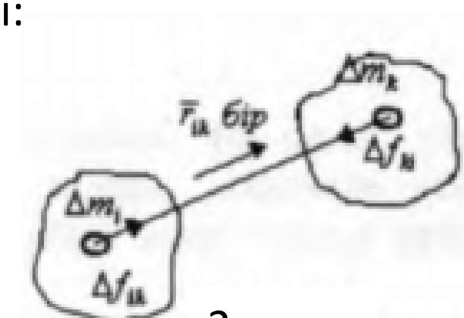
(1) өрнек, шамасы бойынша бір-біріне тең f_{12} және f_{12}, күштердің сандық мәнін береді.



1-сурет

Егер денелердің өлшемдері олардың ара қашықтығымен шамалас болса, онда денелердің әрқайсысын кішкене элементтерге бөлген жөн (2-сурет), солай еткенде әрбір екі элемент үшін Ньютонның тартылыс заңы дұрыс болады, сонда бірінші дененің i-інші элементі мен екінші дененің *к*-шы элементінің өзара әсер ету күші мынаған тең болады:

$$\Delta \overrightarrow{f_{ik}} = \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r^2_{ik\,бір}}, \qquad (2)$$



2-сурет

мұндағы $r_{ik\,бір}$ -бағыты Δm_i-ден Δm_k-ға дейінгі бірлік вектор, ал f_{ik} -осы элементар массалардың ара қашықтығы.

(2) өрнекті, *к* -ның барлық мәні бойынша қосындылап, 2 -ші дене тарапынан, 1-ші денеге жататын Δm_i элементар массаға әсер ететін барлық қорытқы күштерді шығарып аламыз:

$$\Delta \vec{f}_{12} = \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \vec{r}_{ik\,бір} . \qquad (3)$$

Енді осы (3) өрнекті *к* индексінің барлық мәндері бойынша қосындылап, яғни бірінші дененің барлық элементтер массаларына түсірілген күштерді қосып, екінші дененің бірінші дененің барлық элементтер массаларына түсірілген күштерді қосып, екінші дененің бірінші денеге әсер ететін күшін табамыз:

$$\Delta \vec{f}_{12} = \sum_i \sum_k \gamma \frac{\Delta m_i \Delta m_k}{r_{ik}^2} \vec{r}_{ik\,бір} . \qquad (4)$$

Қосындылау *і* және *к* индекстерінің барлық мәні бойынша жүргізілді. Демек, егер 1-ші денені N_1, ал 2-ші денені N_2 элементар массаларға бөлсек, онда (4) қосындысында N_1 N_2 қосылғыштар болады.

Ньютонның үшінші заңы бойынша 1-ші дене 2-ші денеге f_{12} күшіне тең болатын f_{21} күшімен әсер етеді.

Іс жүзінде (4) өрнекті қосындылау интегралдауға әкеледі әрі жалпы айтқанда, өте күрделі математикалық есеп болып табылады. Егер өзара әсерлесетін денелер біртекті шарлар болса, онда олардың өзара әсерлесу күшін есептеп шығару мынандай нәтиже береді:

$$\overline{f_{12}} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \overline{r_{12\,бір}}, \qquad (5)$$

мұндағы, m_1 және m_2 - шар массалары, r - олардың центрлерінің ара қашықтығы, $r_{ik\ бір}$ - бірінші шардың центрінен екінші шардың центріне дейінгі бағытты көрсететін бірлік вектор. Сонымен, шарлар материялық нүктелер ретінде өзара әсерлеседі, ал олардың массалары шар массаларына тең және олардың центрлерінде орналасқан.

Егер денелердің біреуі радиусы *R* өте зор шар (мысалы Жер шары) ретінде берілсе, ал екіншісі шар тәріздес болмаса да, өлшемі *R* - ден әлде қайда кем, бірақ шар бетіне жақын жатқан дене болса, онда олардың өзара әсер етуі (5) өрнекпен сипатталады, мүнда *r*-дің орнына шар радиусын алу қажет.

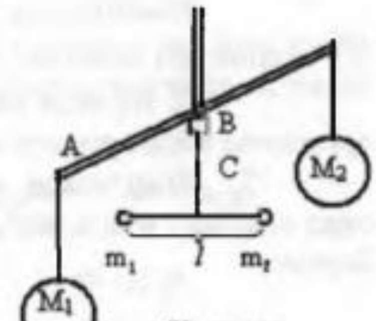
(1) теңдеудегі γ пропорционалдық коэффициенті де Ньютонның екінші заңының тендеуіндегі пропорционалдық коэффициент сияқты алу орынды болады, өйткені бұл жағдайда әр түрлі физикалық құбылыстарды қарастырғанда бір шаманың, мысалы, күштің әр түрлі өлшем бірліктерін пайдалануға тура келер еді. Егер де (1) формулаға енетін шамаларды өлшеу үшін бұрын тағайындалған бірліктерді пайдаланатын болсақ, онда γ гравитациялык түрақты өлшемі бар шама болып шығады. Осы (1) өрнекке сәйкес γ -ның өлшемділігі мынаған тең:

$$[\gamma]=\frac{[f][r^2]}{[m^2]}=\frac{\frac{ML}{T^2}L^2}{M^2}=\frac{L^3}{MT^2}=\frac{м^3}{кг\ \ сек^2}$$

γ-ның сандық мәні, массалары белгілі денелердің бір-біріне тартылатын күшін өлшеу жолымен анықталған. Осыдан өлшеу кезінде көп қиыншылықтар кездеседі, өйткені массалары тікелей өлшенетін денелер үшін тартылыс күштері өте аз болады. Мысалы, әрқайсысының массасы 100 кг, бір-бірінен қашықтығы 1 м болатын екі дене бір-біріне шамамен 10^{-6}Н күшпен өзара әсер етеді.

γ тұрақтысының сан мәнін анықтау үшін ең алғаш ойдағыдай өлшеу жүргізген Кавендиш (1798 ж) болды. Ол күшті өлшеу үшін өте сезгіш иірілмелі таразы әдісін қолданды.

Кавендиш пайдаланған прибордың жобасы мына 51-суретте көрсетілген. Горизонталь күйентеге (А) әрқайсысының массасы 158 кг M_1 және M_2 қорғасын шарлар ілінген. Күйентенің астынан жылжымайтын В бүркеншігіне жіңішке С сымның бір ұшы байланған, оның екінші ұшына жеңіл l стержень асылған, ол стерженьның ұштарына кішілеу m_1 және m_2 қорғасын шарлар орнатылған; Кавендиш тәжірибесінде бұл шарлардың әрқайсысының массасы 730 г болған. А күйентесін бұрғанда үлкен шарлар кішкене шарларға жақындап, оларды өздеріне тартады; ол тартылысты m_1 мен m_2 шарлары орнатылған l стержінінің бұрылуынан байқауға болады. С сымның серпімділік қасиеттерін біле отырып, тартылыс күшін өлшеуге болады, одан соң γ тартылыс тұрақтысының мәнін табады. Кейін Кавендиш тәжірибесі бірнеше рет қайтадан істеледі. γ-ның осы кездегі қабылданған мәні мынадай:



51-сурет

$$\gamma = 6{,}670\ 10^{-11}\,\frac{м^3}{кг\ сек^2}. \quad (6)$$

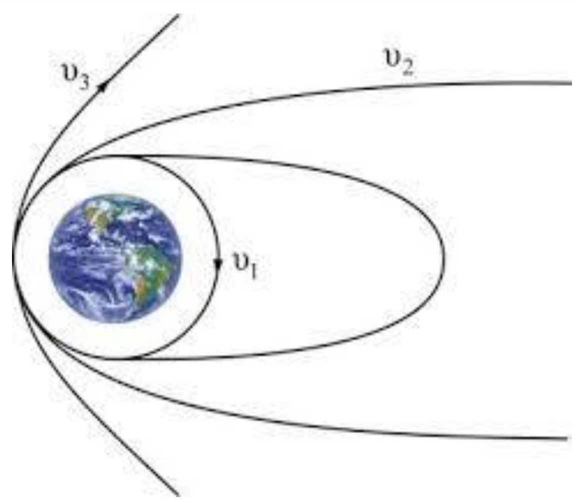
Сонымен, әрқайсысының массалары 1 кг, центрлерінің бір-бірінен қашықтығы 1м болатын екі шар өзара $6{,}670 \cdot 10^{-11}$Н-ға тең күшпен тартылады.

Планеталардың қозғалысы. Кеплер заңдары .

Ньютонның бүкіл әлемдік тартылыс заңын анықтауы үшін планеталар қозғалысының Кеплер ашқан үш заңы негіз болған еді;

1. Барлық планеталар эллипс бойынша қозғалады, оның бір фокусында Күн болады.
2. Планеталардың радиус – векторы тең уақыттар арасында бірдей аудандар сызады.
3. Планеталардың Күнді айналу периодтарының квадраттарының қатынасы олардың орбиталарының үлкен жарты осьтері кубтарының қатынасындай болады.

Кеплердің бірінші заңы планеталардың **центрлік күштер** өрісінде қозғалатындығын көрсетеді. Шынында да, центрлік күштер өрісіндегі дене траекториясы жазық қисық сызық - **гипербола, парабола** немесе **эллипс** – түрінде болады, оның фокусы күш центрлерімен дәл келеді.



Планеталар қозғалыс заңын анықтауды жеңілдету үшін олардың орбитасы эллипс емес, шеңбер болады деп қарастыруға болады, өйткені іс жүзінде барлық планеталар орбиталарының шеңберден айырмашылығы өте аз болды. Сонда планета қозғалатын үдеуді мына түрде жазуға болады:

$$w = \frac{\upsilon^2}{r}, \qquad (18)$$

мұндағы υ – планета қозғалысының жылдамдығы, r – орбита радиусы. υ жылдамдықты $\frac{2\pi r}{T}$ (Т- планетаның Күнді айналу периоды) арқылы алмастырайық:

$$w = \frac{4\pi r^2}{T^2}. \qquad (19)$$

Соңғы өрнектің негізінде Күн жағынан планетаға әсер ететін күштердің қатынасы мынадай болып жазылады:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1 w_1}{m_2 w_2} = \frac{m_1 r_1 T_2^{\,2}}{m_2 r_2 T_1^{\,2}}. \qquad (20)$$

Кеплердің үшінші заңына сәйкес айналу периоды квадраттарының қатынасын орбита радиустары кубтарының қатынасымен алмастырып, мынаны шығарып аламыз:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{m_1}{r_1^2} : \frac{m_2}{r_2^2}. \qquad (21)$$

Сонымен, Кеплердің үшінші заңынан мынадай қорытынды шығады; планетаның Күнге тартылатын күші планета массасына тура пропорционал, ал оның Күнге дейінгі қашықтығының квадратына кері пропорционал болады:

$$f = \kappa \frac{m}{r^2}. \qquad (22)$$

к – пропорционалдық коэффициент өз кезегінде $M_к$ Күн массасына пропорционал болады деп ұйғарып, Ньютон бізге белгілі бүкіл әлемдік тартылыс заңын өрнектейтін мына формулаға тоқтаған:

$$f = \gamma \frac{m M_K}{r^2}. \qquad (23)$$

Бірінші және екінші космостық жылдамдықтар.

Радиусы $R_Ж$ Жер радиусымен шамалас дөңгелек орбита бойымен Жерді айнала қозғалу үшін дене белгілі бір υ_1 жылдамдығына ие болуға тиіс, ал мұндай жылдамдықтың шамасын дене массасының осы денеге әсер ететін ауырлық күшінің центрге тартқыш үдеуіне көбейтіндісінің теңдік шартынан табуға болады:

$$m\frac{\upsilon_1^2}{R_ж} = mg \tag{24}$$

Осыдан $$\upsilon_1 = \sqrt{gR_ж}\,. \tag{25}$$

Демек, қандай да болсын дененің, Жер серігі болуы үшін оған **бірінші космостық жылдамдық** деп аталатын υ_1 жылдамдығы берілуі қажет. g және $R_Ж$ мәндерін орнына қойғанда бірінші космостық жылдамдықтың келесі мәні шығады:

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_ж}\sqrt{9{,}8 * 6{,}4 * 10^6} = 8 * 10^3\, м/сек = 8км/сек \tag{26}$$

υ_1 жылдамдығына ие болған дене Жерге құлап түспейді. Алайда

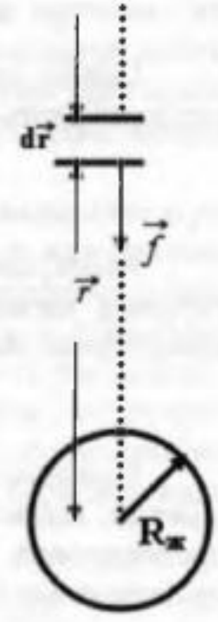
бұл жылдамдық дененің жерге тартылу сферасынан шығып кетуі үшін, яғни Жерге тартылу елеулі роль атқармайтындай қашыққа Жерден ұзап кетуі үшін жеткілікті болмайды. Осыған қажетті υ_2 жылдамдығы **екінші космостық жылдамдық** деп аталады.

Екінші космостық жылдамдықты табу үшін дененің Жер бетінен шексіздікке қашықтап кетуіне қажетті Жерге тартылу күшіне қарсы істелетін жұмысты есептеп шығару керек. Енді дененің Жер центрі арқылы өтетін түзу бойымен орын ауыстырғанда істелетін жұмысын есептеп шығарайық (54-сурет). dr жолында істелетін элементар жұмыс мынаған тең:

$$dA = fdr = \gamma \frac{mM_ж}{r^2} dr$$

r=$R_ж$-ден r= -ке дейінгі жолда істелген жұмысты интегралдау арқылы табамыз:

$$A = \ dA = {}_{R_ж} \gamma \frac{mM_ж}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM_ж}{r_ж} \Big|_{R_ж} = \gamma \frac{mM_ж}{R_ж}.$$



54-сурет

Ауырлық күші Жердің тарту күшіне тең болады деп жорамалдап, мынаны жазуға болады:

$$mg = \gamma \frac{mM_{ж}}{R_{ж}^2}, \text{ осыдан } \gamma \frac{mM_{ж}}{R_{ж}} = mgR_{ж}$$

Сонымен, (28) жұмысты мынадай түрге келтіруге болады:

$$A = mgR_{ж}. \qquad (29)$$

Жерге тартылу күшін жеңіп, Жердің тарту күші әсерінен шығып кету үшін дене (29) жұмысын істеуге жетерліктей энергия қорына ие болуға тиіс. Осыған қажетті ең аз v_2 жылдамдығы екінші космостық жылдамдық болады. Ол мына шартпен анықталады:

$$\frac{mv_2^{\,2}}{2} = mgR_{ж}, \text{ осыдан } v_2 = \sqrt{2gR_{ж}}. \qquad (30)$$

(30) формуланы (25) формуламен салыстырғанда екінші космостық жылдамдықтың бірінші космостық жылдамдықтан $\sqrt{2}$ есе көп екендігі көрінеді. Сонда, 8 км/сек-ты $\sqrt{2}$ санына көбейтсек, v_2 үшін шамамен 11 км/сек мәнін шығарып аламыз.

Күнді айнала планеталардың қозғалысына қатысты центрлік күш өрісіндегі материялық нүктенің қозғалыс заңдары XVII ғ. басында И.Кеплермен тағайындалған. Кеплер Н.Коперниктің Күн жүйесінің Гелиоцентрлік моделін қолданды.
Кеплердің бірінші заңы: Әрбір планета бір фокусінде Күн жататын эллипс формалы орбита бойынша қозғалады. Бұл заң механикалық энергияның сақталу заңының салдары болып табылады.
Кеплердің екінші заңы: Планетаның радиус-векторы оның қозғалысы кезінде бірдей уақыт аралықтарында бірдей аудандарды сызады. Бұл заң центрлік өрістегі материялық нүктенің импульс моментінің сақталу заңының салдары болып табылады.
Кеплердің екінші заңының математикалық тұжырымдамасы:

$$\Delta S = \frac{L}{2m}\Delta t \qquad (141)$$

мұндағы ΔS тең уақыт аралығына сәйкес келетін сектордың ауданы, L - нүктенің (планетаның) импульс моментінің модулі, ал m - массасы.

Кеплердің үшінші заңы, оның екінші заңы сияқты, тек центрлік тартылыс күштері өрісіндегі қозғалысқа ғана қолданылады, мысалы гравитациялық өрістегі планеталардың қозғалысы үшін. Ол былай тұжырымдалады: Планеталардың Күнді айналу периодтарының квадраттарының қатынасы, олардың орбиталарының үлкен жарты өстерінің кубтарының қатынастарына тең.

Кеплердің үшінші заңының математикалық өрнегі:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \qquad (142)$$

Космостық жылдамдықтар:

1. Бірінші космостық (шеңберлік) жылдамдық
2. Екінші космостық (параболалық) жылдамдық
3. Үшінші космостық жылдамдық.

Космос кеңістігіне ұшырылған ұшатын аппарат оның алдына қойылған міндетті орындау үшін, оған бастапқы кезде белгілі бір жылдамдықты беру керек. Осы жылдамдықтарды космостық жылдамдықтар деп атайды.

Бірінші космостық жылдамдық, немесе шеңберлік жылдамдық деп, дене жердің жасанды серігіне айналу үшін оған керекті υ, минимальді жылдамдықты айтады. Осы жылдамдықпен дене Жерді айнала шеңберлік орбитамен қозғалады. Қозғалыс кезінде ауа кедергісі еске алынбайды.

Бірінші космостық жылдамдықтың мәнін анықтау үшін дәл формула былай беріледі:

$$\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM}{r}} \qquad (143)$$

мұнда G - гравитациялық тұрақты, M - Жердің массасы, r - шеңберлік орбитаның радиусы.

Егер жер серігі Жер бетіне жақын қозғалатын болса, онда бірінші космостық жылдамдық мына түрге келеді:

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_{ж}} \qquad (144)$$

мұнда g - еркін түсу үдеуі, $R_{ж}$- Жер радиусы.

$g = 9,81$ *м/с²*, ал $R_{ж} = 6370$км деп есептесек, онда $\upsilon_i = 7,9$ км/с.

Екінші космостық жылдамдық – дене жердің тартылыс күшін жеңіп, Күннің жасанды серігі болуы үшін керекті жылдамдық. Оны кейде параболалық жылдамдық деп атайды. Олай аталу себебі, ол дененің Жердің гравитациялық өрісінде парабола траекториясымен қозғалысына сәйкес келеді.

Екінші космостық жылдамдықтың мәні механикалық энергияның сақталу заңынан шығарылады, ол былай беріледі

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \qquad (145)$$

мұндағы r - Жердің центрінен ұшырылатын денеге дейінгі арақашықтық.

Егер дене Жердің бетінен ұшырылатын болса, онда

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gR_{ж}} = 11{,}2 \text{ км/с.} \qquad (146)$$

Үшінші космостық жылдамдық деп – дене Жердің ғана емес, сонымен қатар Күннің де тартылыс күшін жеңіп, Күн жүйесін тастап шығуы үшін керекті жылдамдықты айтады.

Үшінші космостық жылдамдық $\upsilon_3 = 16,7$ км/с минимальді мәніне үшінші космостық жылдамдықтың векторы $\vec{\upsilon}_3$ Жердің орбитальді жылдамдық векторымен бағыттас болғанда жетеміз. Екі вектордың бір-бірімен бағытына байланысты υ_3 -тің мәндері әртүрлі.

3 Модуль үшін студенттердің өздік жұмысы (СӨЖ)

1. Физикалық маятник. Максвелл маятнигі.
2. Шар формалы дененің гравитациялық энергиясы. Гравитациялық радиус.